



LICEO SCIENTIFICO STATALE  
**JOHN FITZGERALD KENNEDY**  
Via Nicola Fabrizi 7 - 00153 Roma IX Distretto

**ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE**

**Tema di Matematica – 23 giugno 2022**

*Il candidato risolva uno dei due problemi proposti e risponda a quattro quesiti.*

**PROBLEMA 1**

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare  $y' - y = e^x$ .

- Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale e l'integrale particolare che soddisfa la condizione  $y(0) = 2$ .
- Verificato che l'integrale particolare è la funzione  $f(x) = e^x(x + 2)$ , si studi la funzione e si tracci il grafico in un sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ .
- Si determini l'area della porzione di piano delimitata dalla funzione  $g(x) = e^x$ , la funzione  $f$  e l'asse delle  $y$ .
- Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando intorno all'asse  $x$  la regione compresa tra la funzione  $f$  e gli assi cartesiani.

**PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione  $y = \frac{2x^2+ax+3}{(x+1)^2}$  dove  $a$  è un parametro reale.

- Si studi e si tracci il grafico  $C_4$  della funzione nel caso  $a = 4$ .
- Si calcoli il valore dell'area  $A(h)$  compresa tra la curva del punto precedente, la retta  $x = 1$ , la retta  $x = h$  e l'asse  $x$ , con  $h > 1$ .
- Si calcoli il  $\lim_{h \rightarrow +\infty} A(h)$ .
- Si verifichi che  $C_4$  e  $C_5$  (la curva ottenuta per  $a = 5$ ) abbiano un punto in comune  $A$  e si determinino le equazioni delle rette tangenti alle curve in  $A$ .

## QUESITI

1. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di  $y = e^{2x}$  condotte dal punto esterno  $O(0;0)$ .
2. Tra le primitive della funzione  $f(x) = \ln x^2$  individua quella il cui grafico passa per il punto di coordinate  $(1;1)$ .
3. Determina l'espressione analitica della seguente espressione integrale:  $F(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2+1} dt$ .
4. Calcola il  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^4 t dt}{x^4}$ .
5. Determina il rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio  $r$ .
6. Determina il punto appartenente alla curva di equazione  $y = \sqrt{x}$  avente distanza minima dal punto  $A(2,0)$ .
7. Determina gli asintoti della funzione  $y = \frac{x^3+4}{x^3-3x}$ .
8. La funzione  $y = x^3 - 2x^2$  soddisfa le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo  $[0,1]$ ? Se sì trova il punto  $\xi$  che compare nella formula:  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ .

*Durata massima della prova: 6 ore.*

*E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.*

*Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della prova.*